Preuve alternative du th. de Helmholtz

Soit $\vec{G} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}} \, d\tau'$

Alors

$$\nabla^2 \vec{G}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{F}(\vec{r}\,') \, (-4\pi) \, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \, d\tau'$$

$$= -\vec{F}(\vec{r})$$

Mais aussi

$$\nabla^2 \vec{G} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G})$$

Soient $\quad U = \vec{\nabla}\cdot\vec{G} \quad$ et $\quad \vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{G}$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

D'autre part :

$$U = \vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \frac{-1}{4\pi} \int_V \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) d\tau'$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}'}{\mathscr{r}} \, da' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{F}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}} \, d\tau'$$

Si $\oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}'}{\mathscr{r}} = 0$,

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{D(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}} \, d\tau' , \quad D = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

également,

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{G} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{F}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}\,') \times \hat{n}'}{\mathscr{r}}\, da' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, d\tau'$$

Si $\displaystyle\oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}\,') \times \hat{n}'}{\mathscr{r}}\, da' = 0$,

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, d\tau', \qquad \vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Les deux conditions de validité sont donc :

$$\oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}\,') \cdot \hat{n}'}{\mathscr{r}}\, da' = 0 \quad \text{et} \quad \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}\,') \times \hat{n}'}{\mathscr{r}}\, da' = 0$$

Comme S augmente en r^2, il suffit que $|F|$ diminue plus vite que $1/r$ pour que le théorème soit valide en $r \to \infty$.

Cette condition est vérifiée par $\vec{E}$ aussi bien que par $\vec{B}$.